הנחיות חשובות:

א. יש לכתוב את התשובות והפתרונות **רק בטופס הבחינה**! אפשר להשתמש בשני צידי הדף.

ב. נמקו את כל תשובותיכם בפירוט!

ג. מותר להשתמש בכל הטענות והמשפטים שנלמדו בקורס **בתנאי שאתם מצטטים אותם במלואם.**

ד. אסור להשתמש בספרים, מחשבונים, חוברות או כל חומר עזר אחר.

ה. נא לכתוב את מספר הזהות בראש כל עמוד של טופס הבחינה.

ו. אין להוסיף או לתלוש עמודים מטופס הבחינה.

ז. נא להשתמש בעט כחול או שחור בלבד. אין להשתמש בעפרון! בחינה שכתובה בעפרון לא תיסרק!

בהצלחה!

1. יהי $\mathbb{R}_{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2. בכל אחד מהסעיפים הבאים צריך לענות האם תת־קבוצה $W \subset \mathbb{R}_{2\times 2}$ היא תת־מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_{2\times 2}$. אם התשובה היא "כן", הוכיחו אותה ומצאו בסיס של W (והוכיחו שזה אכן בסיס). אם התשובה היא "לא", הראו על ידי דוגמה ספציפית איזו תכונה של תת־מרחב וקטורי אינה מתקיימת אצל W.

1א. (8 **נקודות)** הקבוצה W היא קבוצת המטריצות $A \in \mathbb{R}_{2\times 2}$ הלכסינות מעל $\mathbb{C}$.

פתרון:

ב1. (8 נקודות) הקבוצה W היא קבוצת המטריצות $A \in \mathbb{R}_{2\times 2}$ המקיימות $tr(AC) = 0$, עבור

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

פתרון:

ג1. (8 **נקודות**) הקבוצה W היא קבוצת המטריצות $A \in \mathbb{R}_{2\times 2}$ הלא הפיכות.

פתרון:

2. תהי A מטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2א. (8 **נקודות**) יהי B הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. מצאו בסיס C של $\mathbb{R}^3$ כך ש־$[\bar{v}]_B = A[\bar{v}]_C$ עבור כל $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$. (הוכיחו ש־C זה אכן בסיס של $\mathbb{R}^3$ המקיים את התנאי הזה!)

פתרון:

2ב. (8 **נקודות**) מצאו מטריצות מרוכבות P ו־D מסדר 3×3 כך ש־P הפיכה, D אלכסונית ו־$D = P^{-1}AP$. נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון. הוכיחו שאין מטריצות <u>ממשיות</u> P, D מסדר 3×3 שמקיימות את אותם התנאים.

<u>פתרון:</u>

ג2. (8 **נקודות**) מצאו מטריצות מרוכבות Q ו־L מסדר 3×3 כך ש־Q הפיכה, L אלכסונית ו־$A^{10} = Q^{-1}LQ$. נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון. (רמז: הסעיף הזה קשור לסעיף הקודם.)

פתרון:

3. נגדיר $W \subset \mathbb{R}^4$ כמרחב הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$, כלומר

$$W := \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\ \}.$$

אפשר להניח בלי הוכחה ש־W זה תת־מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^4$.

3א. (8 **נקודות**) מצאו תת־מרחב וקטורי ספציפי U של $\mathbb{R}^4$ כך ש־$\dim U \cap W = 1$ ו־$U + W = \mathbb{R}^4$. (הוכיחו ש־U אכן תת־מרחב וקטורי ושהוא מקיים את התנאים האלה.)

פתרון:

3ב. (8 נקודות) יהי W תת־המרחב הוקטורי של $\mathbb{R}^4$ המוגדר לעיל. נזכיר שהמכפלה הפנימית הסטנדרטית של וקטורים מ־$\mathbb{R}^4$ (ובפרט וקטורים מ־W) מוגדרת על ידי

$$((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

יהי

$$\{\ \bar{e}_1 = (2, 0, 0, -1), \bar{e}_2 = (0, 2, 0, -1), \bar{e}_3 = (0, 0, 1, -1)\ \}$$

בסיס של W (לא צריך לבדוק שזה אכן בסיס). הפעילו את תהליך גרם־שמידט על הבסיס הזה ומצאו בסיס אורתונורמלי B של W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון.

פתרון:

ג3. (8 נקודות) נניח שוקטור $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ שייך ל־W (נזכיר ש־W המוגדר לעיל הוא תת־מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^4$). מצאו את $[(a,b,c,d)]_B$ (כלומר, וקטור הקואורדינטות של (a,b,c,d) לפי הבסיס האורתונורמלי B של W שמצאתם בסעיף הקודם). כתבו את הקואורדינטות של $[(a,b,c,d)]_B$ באמצעות a,b,c,d. נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון.

פתרון:

4. (9 נקודות) יהי $\mathbb{R}_{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2. תהי $T : \mathbb{R}_{2\times 2} \to \mathbb{R}_{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T(A) = A^t$ (לא צריך לבדוק ש־T לינארית).

מצאו את כל הערכים העצמיים של T. עבור כל ערך עצמי של T מצאו בסיס של המרחב העצמי שלו. (כתבו את וקטורים הבסיס כמטריצות השייכות ל־$\mathbb{R}_{2\times 2}$.) נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון.

האם יש ל־$\mathbb{R}_{2\times 2}$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T? אם כן, מצאו בסיס כזה (והוכיחו שהוא אכן בסיס ואיבריו אכן וקטורים עצמיים של T). אם לא ־ הוכיחו שבסיס כזה אינו קיים.

פתרון:

5. (9 נקודות) תהי $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ העתקה לינארית המקיימת $\dim \operatorname{Im} S = 5$. הוכיחו שקיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ כך ש־$T \circ S = Id$. כאן $Id : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ היא העתקת הזהות. (רמז: על מנת להגדיר העתקה לינארית על כל מרחב וקטורי מספיק להגדיר אותה על...).

פתרון:

6. (10 נקודות - זו השאלה הנחשבת גם לציון המגן על תרגילי בית)
הוכיחו שאם A מטריצה ממשית מסדר 6×5 ו־B מטריצה ממשית מסדר 5×6 **אזי** $\det(AB) = 0$.

פתרון:

מספר זהות:

מספר זהות:

מספר זהות:

מספר זהות: